# Géométrie élémentaire du plan

$\mathcal{P}$ désigne le plan géométrique usuel.

Etant donnés deux points $A$ et $B$, on note $\overrightarrow{AB}$ le vecteur allant de $A$ à $B$.
Quand $A=B$, le vecteur obtenu est appelé vecteur nul et est noté $\vec{o}$.
Etant donnés un point $A$ et un vecteur $\vec{u}$, on note $A+\vec{u}$ le point $B$ obtenu en translatant $A$ par $\vec{u}$, i.e. le point déterminé par : $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$.

## I. Notions communes

### 1°) Vecteurs du plan

#### a) direction

*Déf :* On appelle direction du plan $\mathcal{P}$ l'ensemble $P$ formé de ses vecteurs, i.e. $P=\left\{\overrightarrow{AB}/\, A,B\in\mathcal{P}\right\}$.

L'ensemble $P$ est muni d'une addition : $\begin{cases}P\times P\to P\\(\vec{u},\vec{v})\mapsto\vec{u}+\vec{v}\end{cases}$.

*Prop :* $\forall\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in P$ :
$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$, $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$, $\vec{u}+\vec{o}=\vec{o}+\vec{u}=\vec{u}$,
$\exists!\vec{t}\in P,\vec{u}+\vec{t}=\vec{o}$ (ce vecteur $\vec{t}$ est noté $-\vec{u}$),

L'ensemble $P$ est muni d'un produit extérieur réel : $\begin{cases}\mathbb{R}\times P\to P\\(\alpha,\vec{u})\mapsto\alpha.\vec{u}\end{cases}$.

*Prop :* $\forall\vec{u},\vec{v}\in P$, $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ :
$(\lambda+\mu).\vec{u}=\lambda.\vec{u}+\mu.\vec{u}$, $\lambda.(\vec{u}+\vec{v})=\lambda.\vec{u}+\lambda.\vec{v}$, $\lambda.(\mu.\vec{u})=(\lambda\mu).\vec{u}$ et $1.\vec{u}=\vec{u}$.

#### b) colinéarité

*Déf :* Un vecteur $\vec{u}$ est dit colinéaire à un vecteur $\vec{v}$ ssi il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\vec{u}=\lambda\vec{v}$.

*Déf :* Deux vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ du plan sont dits colinéaires ssi l'un est colinéaire à l'autre.

*Prop :* Deux vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires ssi $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}=\vec{o}\Rightarrow\lambda=\mu=0$.

*Théorème :*
Soit $\vec{u},\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires du plan.
$\forall\vec{t}\in P$, $\exists!(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\vec{t}=\alpha.\vec{u}+\beta.\vec{v}$.
On dit alors que $\vec{t}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u},\vec{v}$.

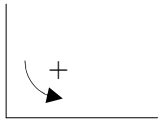
#### c) norme d'un vecteur

*Déf :* La longueur (ou norme) d'un vecteur $\vec{u}\in E$ est notée $\|\vec{u}\|$.

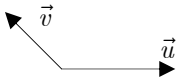
*Prop :* $\forall\vec{u},\vec{v}\in P$ et $\forall\lambda\in\mathbb{R}$,
$\|\vec{u}\|=0\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{o}$, $\|\vec{u}+\vec{v}\|\le\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$ et $\|\lambda.\vec{u}\|=|\lambda|\|\vec{u}\|$.

### 2°) Orientation du plan

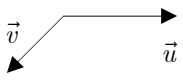
*Déf :* Orienter le plan $\mathcal{P}$ c'est choisir, arbitrairement, un sens de rotation positif sur le plan $\mathcal{P}$.




*Déf :* Soit $\vec{u},\vec{v}\in P$ non colinéaires.
Si on va du vecteur $\vec{u}$ au vecteur $\vec{v}$ dans le sens positif,
on dit que le couple $(\vec{u},\vec{v})$ est une famille directe.
Si, en revanche, on va de $\vec{u}$ à $\vec{v}$ dans le sens contraire au sens positif, on dit que le couple $(\vec{u},\vec{v})$ est une famille indirecte.




$(\vec{u},\vec{v})$ directe




$(\vec{u},\vec{v})$ indirecte

## 3°) Angles dans le plan

### a) angle arithmétique

*Déf :* Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.
On appelle angle arithmétique (ou écart angulaire) entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ la mesure $\alpha$ du plus petit arc de cercle de rayon 1 entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Cette mesure appartient à l'intervalle $[0,\pi]$, on la note $\text{Ecart}(\vec{u},\vec{v})$.

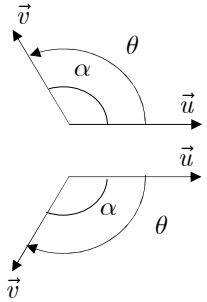
*Prop :* $\forall \vec{u},\vec{v} \in P$ non nuls,
$\text{Ecart}(\vec{u},\vec{v}) = \text{Ecart}(\vec{v},\vec{u})$, $\text{Ecart}(\vec{u},-\vec{v}) = \pi - \text{Ecart}(\vec{u},\vec{v})$.

### b) angle orienté

*Déf :* Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.
On appelle angle orienté de $\vec{u}$ à $\vec{v}$ la mesure à $2\pi$ près de l'arc de cercle de rayon en 1 allant de $\vec{u}$ à $\vec{v}$ dans le sens positif.

L'angle orienté de $\vec{u}$ à $\vec{v}$ est noté $(\vec{u},\vec{v})$ (ou parfois $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$).

L'angle orienté de $\vec{u}$ à $\vec{v}$ est visualisé ainsi : figure




*Prop :* $\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in P$ non nuls,
$(\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{w}) \quad [2\pi]$, $(\vec{v},\vec{u}) = -(\vec{u},\vec{v}) \quad [2\pi]$.

### c) lien entre ces deux notions

Soit $\vec{u},\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires du plan.

Posons $\alpha$ l'écart angulaire entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$. $\alpha \in [0,\pi]$, non orienté

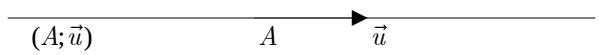
Si $(\vec{u},\vec{v})$ est directe alors $\theta = \alpha \quad [2\pi]$.

Si $(\vec{u},\vec{v})$ est indirecte alors $\theta = -\alpha \quad [2\pi]$.

## 4°) Droite dans le plan

### a) définition

*Déf :* Soit $A$ un point et $\vec{u}$ un vecteur non nul.
On appelle droite passant par $A$ et dirigée par $\vec{u}$ l'ensemble des points $M$ tel que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires à $\vec{u}$. On la note $(A;\vec{u})$.
Ainsi $(A;\vec{u}) = \{A + \alpha.\vec{u} / \alpha \in \mathbb{R}\}$.




*Déf :* On appelle direction d'une droite $\mathcal{D}$ l'ensemble $D$ formé de ses vecteurs. Ainsi $D = \left\{\overrightarrow{AB} / A,B \in \mathcal{D}\right\}$.
Tout vecteur non nul de $D$ est appelé vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

*Prop :* Une droite est entièrement déterminée par un point et un vecteur directeur.

*Prop :* Soit $A,B \in \mathcal{P}$ distincts. Il existe une unique droite passant par $A$ et $B$, on la note $(AB)$.

*Déf :* Un vecteur non nul est dit normal à une droite $\mathcal{D}$ ssi il est orthogonal aux vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$.

*Prop :* Une droite est entièrement déterminée par un point et un vecteur normal.

*Déf :* Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont dites parallèles ssi elles ont même direction. On note alors $\mathcal{D} // \mathcal{D}'$.

*Déf :* Deux droites sont dites orthogonales (ou perpendiculaires) ssi leur vecteurs directeurs sont orthogonaux.

### b) mesure algébrique

*Déf :* Orienter la droite $\mathcal{D}$, c'est définir un sens positif sur celle-ci : $+$

*Déf :* Soit $A$ et $B$ deux points d'une droite orientée $\mathcal{D}$. On appelle mesure algébrique de $A$ à $B$ le réel noté $\overline{AB}$ égal à $AB$ si on va de $A$ à $B$ dans le sens positif et égal à $-AB$ si on va de $A$ à $B$ dans le sens négatif.

*Prop :* Soit $A,B,C$ trois points d'une droite orientée $\mathcal{D}$.
$\overline{AB} = 0 \Leftrightarrow A = B$, $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ et $\overline{BA} = -\overline{AB}$.

*Théorème :* (de Thalès)

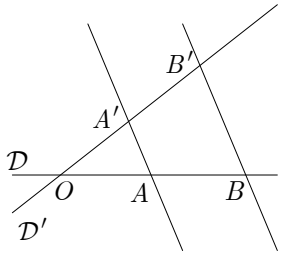
Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites sécantes en $O$. Soit $A,B\in\mathcal{D}\setminus\{O\}$ et $A',B'\in\mathcal{D}'\setminus\{O\}$.

On a équivalence entre :

(i) $(AA')//(BB')$,

(ii) $\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}}$,

De plus, si tel est le cas : $\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}}=\dfrac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}}$.




**c) angle de droites**

Il y a deux angles orientés possibles entres des vecteurs directeurs de deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, ceux-ci sont égaux à $\pi$ près. figure.

*Déf :* Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites du plan. On appelle angle orienté de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{D}'$ l'angle, mesuré à $\pi$ près, entre les vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. On le note $(\mathcal{D},\mathcal{D}')$ (ou parfois $(\widehat{\mathcal{D},\mathcal{D}'})$ ).

*Prop :* Soit $\mathcal{D},\mathcal{D}',\mathcal{D}''$ trois droites : $(\mathcal{D},\mathcal{D}')+(\mathcal{D}',\mathcal{D}'')=(\mathcal{D},\mathcal{D}'')\ \ [\pi]$ et $(\mathcal{D}',\mathcal{D})=-(\mathcal{D},\mathcal{D}')\ \ [\pi]$.

### 5°) Barycentre

*Prop :* Soit $A_1,\dots,A_n\in\mathcal{P}$ et $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ tels que $\lambda_1+\cdots+\lambda_n\neq 0$.

Il existe un unique point $G$ du plan tel que $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overrightarrow{GA_i}=\vec{o}$ (1).

*Déf :* Ce point $G$ est appelé barycentre des points $A_1,\dots,A_n$ affectés des masses $\lambda_1,\dots,\lambda_n$. On note $G=\mathrm{bar}\big((A_i,\lambda_i)\big)_{1\le i\le n}$.

*Prop :* $\forall M\in\mathcal{P},\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overrightarrow{MA_i}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overrightarrow{MG}$ (2).

*Prop :* On ne modifie pas le barycentre des points $A_1,\dots,A_n$ affectés des masses $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ lorsqu'on multiplie chaque masse par un même $\alpha\neq 0$.

*Déf :* On appelle isobarycentre des points $A_1,\dots,A_n$ le barycentre de ces points affectés de la masse 1.

### 6°) Triangle

Soit $(ABC)$ un triangle non plat.

*Prop :* Les médianes du triangle $(ABC)$ sont sécantes en $G$ isobarycentre des points $A,B,C$.

*Prop :* Les médiatrices du triangle $(ABC)$ sont sécantes en $O$ centre du seul cercle circonscrit au triangle $(ABC)$.

*Prop :* Les hauteurs du triangle $(ABC)$ se coupent en un point $H$ appelé orthocentre du triangle $(ABC)$.

## II. Produit scalaire et produit mixte

### 1°) Produit scalaire

**a) définition**

*Déf :* On appelle produit scalaire de $\vec{u},\vec{v}\in P$ le réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ défini par : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$ avec $\theta=(\vec{u},\vec{v})\ \ [2\pi]$

*Prop :* (Symétrie du produit scalaire) $\forall\vec{u},\vec{v}\in P$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$.

*Prop :* (Interprétation géométrique)

Soit $\mathcal{D}$ une droite, $O,A\in\mathcal{D}$ et $B\in\mathcal{P}$ et $B'$ le projeté de $B$ sur $\mathcal{D}$.

On a $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overline{OA}\times\overline{OB'}$. figure

**b) bilinéarité du produit scalaire**

*Prop :* $\forall\vec{u},\vec{v}\in P$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\vec{u}\cdot(\alpha.\vec{v})=\alpha.(\vec{u}\cdot\vec{v})$

*Théorème :*

$\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in P$ , $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$ :

$\vec{u}\cdot(\lambda.\vec{v}+\mu.\vec{w}) = \lambda.\vec{u}\cdot\vec{v}+\mu.\vec{u}\cdot\vec{w}$ et $(\lambda.\vec{u}+\mu.\vec{v})\cdot\vec{w} = \lambda.\vec{u}\cdot\vec{w}+\mu.\vec{v}\cdot\vec{w}$ .

**c) identités remarquables**

*Prop :* $\forall \vec{u},\vec{v} \in P$ :

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$ , $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$ ,

$(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$ et $4\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2$ .

### 2°) Produit mixte

*Déf :* On appelle produit mixte de $\vec{u},\vec{v} \in P$ le réel noté $\text{Det}(\vec{u},\vec{v})$ défini par :

$\text{Det}(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta$ avec $\theta = (\vec{u},\vec{v})$ $[2\pi]$.

*Prop :* (Antisymétrie du produit mixte)

$\forall \vec{u},\vec{v} \in P$ , $\text{Det}(\vec{u},\vec{v}) = -\text{Det}(\vec{v},\vec{u})$ .

*Théorème :*

$\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in P$ , $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$ :

$\text{Det}(\vec{u},\lambda.\vec{v}+\mu.\vec{w}) = \lambda.\text{Det}(\vec{u},\vec{v})+\mu.\text{Det}(\vec{u},\vec{w})$ et $\text{Det}(\lambda.\vec{u}+\mu.\vec{v},\vec{w}) = \lambda.\text{Det}(\vec{u},\vec{w})+\mu.\text{Det}(\vec{v},\vec{w})$ .

*Prop :* (Interprétation géométrique)

Si $(ABCD)$ est un parallélogramme, son aire est $\mathcal{A} = \left|\text{Det}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})\right|$

### 3°) Métrique dans le triangle

*Prop :* Si $(ABC)$ est un triangle, son aire est $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\text{Det}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right|$ .

*Prop :* En posant $a = BC$ , $b = CA$ , $c = AB$ et $\hat{A} = Ecart(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ alors

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$ .

## III. Coordonnées cartésiennes dans le plan

### 1°) Repère cartésien

*Déf :* On appelle repère cartésien du plan, tout triplet $\mathcal{R} = (O;\vec{i},\vec{j})$ formé d'un point $O$ et de deux vecteurs non colinéaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ .

$O$ : origine du repère.

$\vec{i},\vec{j}$ : vecteurs de base du repère.

$(Ox) = (O,\vec{i})$ : axe des abscisses du repère.

$(Oy) = (O;\vec{j})$ : axe des ordonnées du repère.

*Prop :* Soit $\mathcal{R} = (O;\vec{i},\vec{j})$ un repère cartésien du plan.

$\forall \vec{u} \in P$ , $\exists!(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{u} = \alpha.\vec{i}+\beta.\vec{j}$ ,

$\forall M \in \mathcal{P}$ , $\exists!(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i}+y.\vec{j}$ .

*Déf :* Avec les notations ci-dessus :

$\alpha,\beta$ sont appelées composantes (ou coordonnées) du vecteur $\vec{u}$ dans $\mathcal{R}$ ,

$x,y$ sont appelées coordonnées du point $M$ dans $\mathcal{R}$ .

La première coordonnée est appelée abscisse, la seconde ordonnée.

*Déf :* Munir le plan $\mathcal{P}$ du repère $\mathcal{R}$ (ou rapporter le plan $\mathcal{P}$ au repère $\mathcal{R}$ ), c'est considérer que les coordonnées des points et les composantes des vecteurs sont toutes lues dans $\mathcal{R}$ .

On note alors $\vec{u}(\alpha,\beta)$ ou $\vec{u}\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}$ pour signifier que $\vec{u}$ est le vecteur de composantes $\alpha$ et $\beta$ .

On note aussi $M(x,y)$ ou $M\begin{vmatrix}x\\ y\end{vmatrix}$ pour signifier que $M$ est point de coordonnées $x$ et $y$ .

*Prop :* On suppose le plan muni d'un repère $\mathcal{R}$.

Pour $A\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$, $B\begin{vmatrix}x'\\y'\end{vmatrix}$, $\vec{u}\begin{vmatrix}\alpha\\\beta\end{vmatrix}$ et $\vec{v}\begin{vmatrix}\alpha'\\\beta'\end{vmatrix}$ on a :

$\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}x'-x\\y'-y\end{vmatrix}$, $(A+\vec{u})\begin{vmatrix}x+\alpha\\y+\beta\end{vmatrix}$, $(\vec{u}+\vec{v})\begin{vmatrix}\alpha+\alpha'\\\beta+\beta'\end{vmatrix}$ et $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $(\lambda.\vec{u})\begin{vmatrix}\lambda\alpha\\\lambda\beta\end{vmatrix}$.

*Prop :* On suppose le plan muni d'un repère $\mathcal{R}$.

Si $G\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ est barycentre des points $A_1\begin{vmatrix}x_1\\y_1\end{vmatrix},\ldots,A_n\begin{vmatrix}x_n\\y_n\end{vmatrix}$ affectés des masses $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ telles que

$\lambda_1+\cdots+\lambda_n\neq 0$ alors : $x=\dfrac{\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n}{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}$ et $y=\dfrac{\lambda_1y_1+\cdots+\lambda_ny_n}{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}$.

## 2°) Repère orthonormé

### a) définition

*Déf :* Un repère $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j})$ est dit orthonormé ssi les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont unitaires et orthogonaux.

Si de plus la famille $(\vec{i},\vec{j})$ est directe alors le repère orthonormé $\mathcal{R}$ est qualifié de direct et d'indirect sinon.

### b) expression du produit scalaire dans un repère orthonormé

On suppose le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j})$.

*Théorème :*

Pour $\vec{u}\begin{vmatrix}\alpha\\\beta\end{vmatrix}$ et $\vec{v}\begin{vmatrix}\alpha'\\\beta'\end{vmatrix}$, on a $\vec{u}\cdot\vec{v}=\alpha\alpha'+\beta\beta'$.

*Cor :* Pour $\vec{u}\begin{vmatrix}\alpha\\\beta\end{vmatrix}$, $A\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ et $B\begin{vmatrix}x'\\y'\end{vmatrix}$ on a : $\|\vec{u}\|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ et $AB=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}$.

*Cor :* $\forall\vec{u}\in P$, les composantes de $\vec{u}$ sont $\alpha=\vec{u}\cdot\vec{i}$ et $\beta=\vec{u}\cdot\vec{j}$

$\forall M\in\mathcal{P}$, les coordonnées de $M$ sont $x=\overrightarrow{OM}\cdot\vec{i}$ et $y=\overrightarrow{OM}\cdot\vec{j}$.

### c) expression du produit mixte dans un repère orthonormé direct

On suppose le plan muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j})$.

*Déf :* On appelle produit en crois des réels $a,b,c,d$ le réel :

On note $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$. On y visualise le produit en croix : $\begin{matrix}a&\times&b\\c&&d\end{matrix}$

*Théorème :*

Pour $\vec{u}\begin{vmatrix}\alpha\\\beta\end{vmatrix}$ et $\vec{v}\begin{vmatrix}\alpha'\\\beta'\end{vmatrix}$, on a $\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix}\alpha&\alpha'\\\beta&\beta'\end{vmatrix}$.

*Cor :* $\vec{u}\begin{vmatrix}\alpha\\\beta\end{vmatrix}$ et $\vec{v}\begin{vmatrix}\alpha'\\\beta'\end{vmatrix}$ sont colinéaires ssi $\begin{vmatrix}\alpha&\alpha'\\\beta&\beta'\end{vmatrix}=0$.

$A\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix},B\begin{vmatrix}x'\\y'\end{vmatrix},C\begin{vmatrix}x''\\y''\end{vmatrix}$ sont alignés ssi $\begin{vmatrix}x'-x&x''-x\\y'-y&y''-y\end{vmatrix}=0$.

### d) calcul de l'angle formé par deux vecteurs

Soit $\vec{u},\vec{v}$ deux vecteurs non nuls $\alpha=Ecart(\vec{u},\vec{v})$ et $\theta=(\vec{u},\vec{v})\ \ [2\pi]$.

On a $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta$ et $\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v})=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta$.

La première relation permet de calculer $\alpha\in[0,\pi]$.

Les deux relations permettent de déterminer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ donc $\theta$ à $2\pi$ près.

### e) formule de changement de repère orthonormé direct

*Prop :* Soit $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j})$ et $\mathcal{R}'=(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ deux repères orthonormés directs.

Notons $x_\Omega$ et $y_\Omega$ les coordonnées de $\Omega$ dans $\mathcal{R}$ et $\theta=(\vec{i},\vec{u})\ \ [2\pi]$ l'angle du repère $\mathcal{R}$ au repère $\mathcal{R}'$.

Pour tout point $M$ de coordonnées $x$ et $y$ dans $\mathcal{R}$, ses coordonnées $x'$ et $y'$ dans $\mathcal{R}'$ sont données par : $\begin{cases} x' = \cos\theta(x - x_\Omega) + \sin\theta(y - y_\Omega) \\ y' = -\sin\theta(x - x_\Omega) + \cos\theta(y - y_\Omega) \end{cases}$

### 3°) Paramétrage

On suppose le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$.

*Déf :* Soit $t \mapsto (x(t), y(t))$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}^2$.

On appelle courbe définie par le paramétrage $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in I$ l'ensemble formé des points $M\begin{vmatrix} x(t) \\ y(t) \end{vmatrix}$ avec $t \in I$.

On note $\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ avec $t \in I$ pour signifier que $\Gamma$ est la courbe définie par le paramétrage proposé.

### 4°) Equation cartésienne

On suppose le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$.

#### a) définition

*Déf :* Soit $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On appelle courbe d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$ l'ensemble formé des points $M\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ avec $(x, y) \in \mathcal{D}$ solution de l'équation $f(x, y) = 0$.

On note $\Gamma : f(x, y) = 0$, pour signifier que $\Gamma$ est la courbe d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$.

#### b) équation cartésienne d'une droite

*Théorème :*

Soit $(a, b) \neq (0, 0)$.

Les droites du plan dont $\vec{n}\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$ est vecteur normal (ou $\vec{u}\begin{vmatrix} -b \\ a \end{vmatrix}$ est vecteur directeur) correspondent aux courbes possédant une équation cartésienne de la forme $ax + by = c$.

#### c) distance d'un point à une droite

*Théorème :*

Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation $ax + by = c$ et $M\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$.

La distance $d$ du point $M$ à la droite $\mathcal{D}$ est $d(M, \mathcal{D}) = \dfrac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

### 5°) Bissectrices de deux droites dans le plan

*Prop :* Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites non parallèles sécantes en $O$.

L'ensemble $\mathcal{B}$ formé des points $M$ équidistants de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ est la réunion de deux droites $\Delta$ et $\Delta'$ perpendiculaires en $O$ déterminées par :

$(\mathcal{D}, \Delta) = \dfrac{\alpha}{2} \quad [\pi]$ et $(\mathcal{D}, \Delta') = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$ avec $\alpha = (\mathcal{D}, \mathcal{D}') \quad [\pi]$.

Les droites $\Delta$ et $\Delta'$ s'appellent bissectrices des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

### 6°) Exploitation des nombres complexes

Munir le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé direct permet d'introduire les notions d'affixe de vecteurs et d'affixe de points.

*Prop :* Si $\vec{u}, \vec{v}$ sont d'affixes $z, z'$ alors

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \text{Re}(\bar{z}z')$, $\text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = \text{Im}(\bar{z}z')$, $\|\vec{u}\| = |z|$ et

si $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{o}$ : $(\vec{u}, \vec{v}) = \arg(z'/z) \quad [2\pi]$.

*Prop :* Soit $A(a), B(b), C(c)$ trois points du plan.

$AB = |b-a|$ et sous réserve d'existence : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\dfrac{c-a}{b-a} \quad [2\pi]$.

$\overrightarrow{AB}(b-a)$ et $\overrightarrow{AC}(c-a)$.

*Prop :* L'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}(a)$ (notée $t_{\vec{u}}$) est $z \mapsto z+a$.

*Prop :* L'écriture complexe de l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$ (notée $H_{\Omega,\lambda}$) est $z \mapsto \omega + \lambda(z-\omega)$.

*Prop :* L'écriture complexe de la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ (notée $\text{Rot}_{\Omega,\theta}$) est $z \mapsto \omega + e^{i\theta}(z-\omega)$.

L'écriture complexe de la symétrie par rapport à la droite $\mathcal{D}$ passant par $O$ et faisant un angle $\theta$ avec l'axe $(Ox)$ (notée $s_{\mathcal{D}}$) est $z \mapsto e^{2i\theta}\overline{z}$.

## IV. Cercles et lignes de niveaux

### 1°) Cercles

*Déf :* Soit $\Omega \in \mathcal{P}$ et $R \geq 0$.

On appelle cercle de centre $\Omega$ et de rayon $R$ l'ensemble $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\Omega, R) = \{M \in \mathcal{P} / \Omega M = R\}$.

Lorsque $R = 0$, on parle de cercle point.

Lorsque $R > 0$, on parle de vrai cercle.

*Prop :* On suppose le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé. Les cercles du plan de centre $\Omega\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$ sont les courbes possédant une équation cartésienne de la forme $x^2+y^2-2ax-2by=c$ avec $c+a^2+b^2 \geq 0$.

*Déf :* Soit $M$ un point d'un vrai cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega$. La droite passant par ce point et dont $\overrightarrow{\Omega M}$ est vecteur normal est appelée tangente à $\mathcal{C}$ en $M$.

*Prop :* On suppose le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé. La tangente en un point $M\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$ en un vrai cercle d'équation $x^2+y^2-2ax-2by=c$ a pour équation $xx_0+yy_0-a(x+x_0)-b(y+y_0)=c$.

*Théorème de l'angle inscrit*

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre $\Omega$ et de rayon $R>0$ du plan $\mathcal{P}$.

Soit $A, B$ deux points de $\mathcal{C}$ distincts.

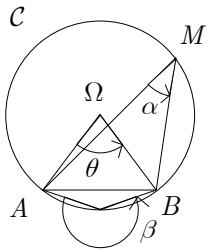
Pour tout $M \in \mathcal{P}$ tel que $M \neq A$ et $M \neq B$ on a :

$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \quad [2\pi]$.

$\theta = 2\alpha \quad [2\pi]$

$\theta = 2\beta \quad [2\pi]$

$\beta = \alpha + \pi \quad [2\pi]$.




*Cor :* Soit $A, B, C, D$ quatre points deux à deux distincts.

On a équivalence entre :

(i) $A, B, C, D$ sont cocycliques ou alignés,

(ii) $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \quad [\pi]$,

### 2°) Incidences

#### a) incidence d'une droite et d'un cercle

Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\Omega, R)$ un vrai cercle et $\mathcal{D}$ une droite du plan $\mathcal{P}$.

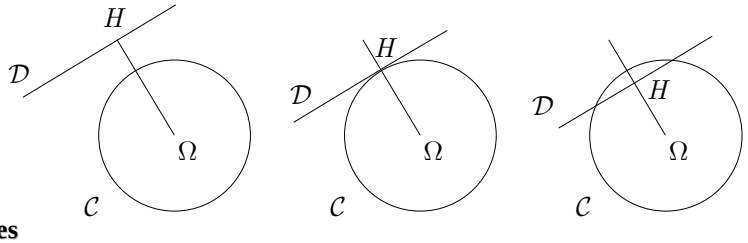
Soit $H$ le projeté orthogonal de $\Omega$ sur $\mathcal{D}$.

Posons $d = \Omega H$ la distance de $\Omega$ à $\mathcal{D}$.

Soit $M \in \mathcal{D}$. On a $\Omega M^2 = \Omega H^2 + HM^2 = d^2 + HM^2$.

Donc $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow HM^2 = R^2 - d^2$.

Si $d > R$ alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = \varnothing$.
Si $d = R$ alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = \{H\}$, la droite $\mathcal{D}$ est alors dite tangente à $\mathcal{C}$ en $H$.
Si $d < R$ alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}$ est formé de deux points dont $H$ est le milieu.




**b) incidence de deux cercles**

Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\Omega, R)$ et $\mathcal{C}' = \mathcal{C}(\Omega', R')$ deux vrais cercles.
Si $\Omega = \Omega'$ alors $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \varnothing$ si $R \neq R'$ et $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \mathcal{C}$ sinon.
Si $\Omega \neq \Omega'$ alors introduisons $d = \Omega\Omega'$ la distance entre leurs centres.
Si $d < |R - R'|$ alors $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' \neq \varnothing$ (cercles intérieurs l'un à l'autre)
Si $d = |R - R'|$ alors $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ est réduit à un point (cercles intérieurs tangents)
Si $|R - R'| < d < R + R'$ alors $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ est formé de deux points symétriques par rapport à $(OO')$.
Si $d = R + R'$ alors $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ est réduit à un point (cercles extérieurs tangents)
Si $d > R + R'$ alors $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \varnothing$ (cercles extérieurs l'un à l'autre).

### 3°) Etude de lignes de niveau

*Déf :* Soit $f : U \subset \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On appelle ligne de niveau $\lambda$ de $f$ l'ensemble $\mathcal{S}_\lambda$ formé des points $M$ de $U$ tels que $f(M) = \lambda$.

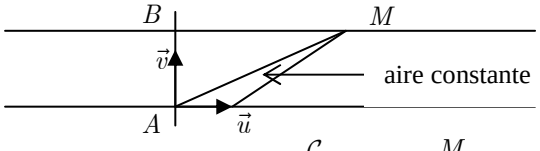
$A, B$ désignent deux points distincts et $\vec{u}$ un vecteur unitaire.

**a) étudions** $\mathcal{S}_\lambda : \vec{u}.\overrightarrow{AM} = \lambda$

Cas $\lambda = 0$ :
$\vec{u}.\overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow M$ appartient à la droite passant par $A$ de vecteur normal $\vec{u}$.
Cas général :
Soit $B = A + \lambda\vec{u}$ de sorte que $\overrightarrow{AB}.\vec{u} = \lambda \|\vec{u}\|^2 = \lambda$. $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = \lambda \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\vec{u} = 0$.
Ainsi $\mathcal{S}_\lambda$ est la droite passant par $B$ de vecteur normale $\vec{u}$.

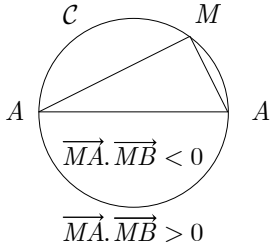
**b) étudions** $\mathcal{S}_\lambda : \mathrm{Det}(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \lambda$

Cas $\lambda = 0$ :
$\mathrm{Det}(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = 0 \Leftrightarrow M$ appartient à la droite passant par $A$ dirigée par $\vec{u}$.
Cas général :
Soit $B = A + \lambda\vec{v}$ avec $\vec{v}$ le vecteur unitaire déterminé par $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2 \quad [2\pi]$.
$B$ est défini de sorte que $\mathrm{Det}(\overrightarrow{AB}, \vec{u}) = \lambda$.
$\mathrm{Det}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = \lambda \Leftrightarrow \mathrm{Det}(\overrightarrow{BM}, \vec{u}) = 0$.
Ainsi $\mathcal{S}_\lambda$ est la droite passant par $B$ et dirigée par $\vec{u}$.




**c) étudions** $\mathcal{S}_\lambda : \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \lambda$

Soit $I = m[A, B]$
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$ donc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \lambda \Leftrightarrow MI^2 = \lambda + IA^2$.
Si $IA^2 + \lambda < 0$ alors $\mathcal{S}_\lambda = \varnothing$.
Si $IA^2 + \lambda \geq 0$ alors $\mathcal{S}_\lambda = \mathcal{C}(I, \sqrt{IA^2 + \lambda})$.




*En particulier :*
Pour $\lambda = 0$, l'ensemble des points $M$ tel que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[A, B]$.

**d) étudions** $\mathcal{S}_\lambda : MA/MB = \lambda$ **.**

Soit $M \in \mathcal{P}$ tel que $M \neq B$.

Cas $\lambda < 0$ : $\mathcal{S}_\lambda = \varnothing$.

Cas $\lambda = 1$. $\mathcal{S}_\lambda$ est la médiatrice du segment $[A,B]$.

Cas $\lambda \geq 0$ et $\lambda \neq 1$ :

$MA = \lambda MB \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - \lambda\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA} + \lambda\overrightarrow{MB}) = 0$.

Posons $I = \text{bar}((A,1),(B,-\lambda))$ et $J = \text{bar}((A,1),(B,\lambda))$.

$MA = \lambda MB \Leftrightarrow (1-\lambda^2)\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

$\mathcal{S}_\lambda$ est le cercle de diamètre $[I,J]$.

**e) étudions** $\mathcal{S}_\theta : (\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \theta \quad [\pi]$

Soit $M \in \mathcal{P}$ tel que $M \neq A,B$.

Cas : $\theta = 0 \quad [\pi]$. $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = 0 \quad [\pi] \Leftrightarrow A,B,M$ alignés $\mathcal{S} = (AB)\setminus\{A,B\}$

Cas $\theta \neq 0 \quad [\pi]$ Soit $\Omega$ le point de la médiatrice du segment $[A,B]$ tel que $(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}) = 2\theta \quad [2\pi]$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega$ et de rayon $R = \Omega A = \Omega B$.

$(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \theta \quad [2\pi] \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}) \quad [2\pi]$

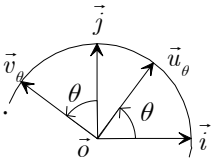
Donc $\mathcal{S} = \mathcal{C}\setminus\{A,B\}$.

## V. Coordonnées polaires

On suppose le plan muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O;\vec{i},\vec{j})$.

### 1°) Vecteurs polaires

*Déf :* On appelle vecteurs polaires d'angle $\theta \in \mathbb{R}$, les vecteurs $\begin{cases}\vec{u}_\theta = \cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j} \\ \vec{v}_\theta = -\sin\theta.\vec{i} + \cos\theta.\vec{j}\end{cases}$.

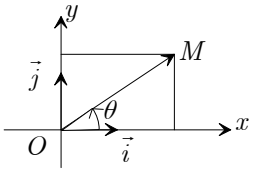



*Prop :* $\forall\theta \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\begin{cases}\vec{u}_{\theta+2k\pi} = \vec{u}_\theta \\ \vec{v}_{\theta+2k\pi} = \vec{v}_\theta\end{cases}, \begin{cases}\vec{u}_{\theta+\pi} = -\vec{u}_\theta \\ \vec{v}_{\theta+\pi} = -\vec{v}_\theta\end{cases} \text{ et } \begin{cases}\vec{u}_{\theta+\pi/2} = \vec{v}_\theta \\ \vec{v}_{\theta+\pi/2} = -\vec{u}_\theta\end{cases}.$$

*Prop :* $\forall\theta,\theta' \in \mathbb{R}, \vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_{\theta'} = \cos(\theta-\theta')$.

### 2°) Coordonnées polaires d'un point




*Déf :* Soit $M$ un point du plan $\mathcal{P}$.
On appelle système de coordonnées polaires du point $M$ tout couple $(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{OM} = \rho.\vec{u}_\theta$.

*Prop :* (Positionnement d'un point)
Soit $M$ un point dont $(\rho,\theta)$ est un système de coordonnées polaires.

Si $\rho > 0$ alors $OM = \rho$ et $(\vec{i},\overrightarrow{OM}) = \theta \quad [2\pi]$.

Si $\rho = 0$ alors $M = O$.

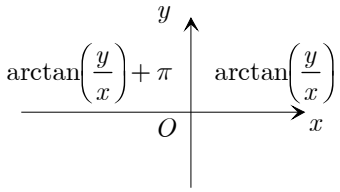
Si $\rho < 0$ alors $OM = -\rho$ et $(\vec{i},\overrightarrow{OM}) = \theta + \pi \quad [2\pi]$. figure

*Prop :* $M\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ a pour coordonnées polaires $(\rho,\theta)$ ssi $\begin{cases}x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta\end{cases}$.

*Prop :* Soit $M$ un point du plan $\mathcal{P}$ de coordonnées $(x,y)$.

On peut former un système de coordonnées polaires $(\rho,\theta)$ du point $M$ en prenant :

$\rho = OM = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta = (\vec{i},\overrightarrow{OM})$ $[2\pi]$ donné par :




Si $x>0$ alors $\theta = \arctan\dfrac{y}{x}$ $[2\pi]$,

Si $x<0$ alors $\theta = \arctan\dfrac{y}{x}+\pi$ $[2\pi]$,

Si $x=0$ et $y>0$ alors $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ et

Si $x=0$ et $y<0$ alors $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

Si $x=y=0$ alors $\theta$ quelconque convient.

## 3°) Equation polaire

### a) définition

*Déf :* Soit $g:(\rho,\theta)\mapsto g(\rho,\theta)$ une fonction définie sur une partie $U$ de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On appelle courbe d'équation polaire $g(\rho,\theta)=0$ l'ensemble $\Gamma$ formé des points $M$ possédant un système de coordonnées polaires $(\rho,\theta)\in U$ solution de l'équation $g(\rho,\theta)=0$. On note alors $\Gamma : g(\rho,\theta)=0$.

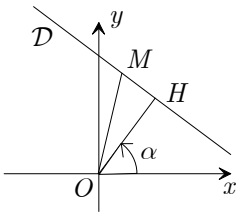
### b) équation polaire d'une droite

Soit $\mathcal{D}$ une droite.

Si $\mathcal{D}$ passe par $O$ alors en notant $\alpha = ((Ox),\mathcal{D})$ $[\pi]$, l'équation $\theta=\alpha$ est une équation polaire de $\mathcal{D}$.

Si $\mathcal{D}$ ne passe pas par $O$ :

Notons $H$ le projeté orthogonal de $O$ sur $\mathcal{D}$, $d=OH$ et $\alpha = (\vec{i},\overrightarrow{OH})$ $[2\pi]$.




$\rho = \dfrac{d}{\cos(\theta-\alpha)}$ est une équation polaire de $\mathcal{D}$.

### c) équation polaire d'un cercle

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre $\Omega$ et de rayon $R$.

Si $\Omega = O$ alors $\rho = R$ est une équation polaire de $\mathcal{C}$.

Si $\Omega \neq O$ alors introduisons $d = O\Omega$ et $\alpha = (\vec{i},\overrightarrow{O\Omega})$ $[2\pi]$. $\overrightarrow{O\Omega} = d\vec{u}_\alpha$.

$d^2 - 2d\rho\cos(\theta-\alpha)+\rho^2 = R^2$ est une équation polaire de $\mathcal{C}$.

*Prop :* Si $O\in\mathcal{C}$ alors l'équation polaire de $\mathcal{C}$ est $\rho = 2R\cos(\theta-\alpha)$.